MAT 101 ANALİZ 1.2 DERSİ QUİZ 1 SORU VE ÇÖZÜMLERİ

1) $M=\left\{\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ kümesinin supremum ve infimum değerlerini bulunuz.

Çözüm: $\forall n\in\mathbb{N}$ için $0<\frac{1}{n}\leq 1$ olduğu biliniyor. O halde $\forall n\in\mathbb{N}$ için $0<\frac{3}{n}\leq 3$ ve dolayısıyla $\frac{1}{3}<\frac{1}{3}+\frac{3}{n}\leq\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$ dür. Bu durumda M kümesinin üst sınırlarının kümesi $[\frac{10}{3},\infty)$ ve $\sup M=\frac{10}{3}$ olur.
Şimdi $\inf M=\frac{1}{3}$ olduğunu gösterelim, yani $\forall\varepsilon>0$ için $x_\varepsilon<\frac{1}{3}+\varepsilon$ olacak şekilde $x_\varepsilon\in M$ sayısının var olduğunu gösterelim.
Arşimet prensibinin sonucuna göre $\forall\varepsilon>0$ için $\frac{1}{n_0}<\frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $n_0\in\mathbb{N}$ vardır. O halde $\frac{1}{3}+\frac{3}{n_0}<\frac{1}{3}+\varepsilon$ yazılır. $\frac{1}{3}+\frac{3}{n_0}\in M$ olduğundan $\inf M=\frac{1}{3}$ elde edilmiş olur.

2) Eğer $A,B\subset\mathbb{R}$ kümeleri alttan sınırlı ise $A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\}$ kümesinin de alttan sınırlı olduğunu ve

$$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: A ve B alttan sınırlı olduğundan her $a\in A$ için $m_1\leq a$ ve her $b\in B$ için $m_2\leq b$ olacak şekilde $m_1, m_2\in\mathbb{R}$ vardır. $A+B=\{z=a+b: a\in A, b\in B\}$ olduğu gözönüne alınırsa $\forall z=a+b\in A+B$ için $m_1+m_2\leq a+b$ olur ki bu ise $A+B$ nin alttan sınırlı olması demektir. Diğer taraftan A ve B $\mathbb{R}$ nin boş olmayan alttan sınırlı alt kümeleri olduğundan infimum değerleri vardır, bu değerler c ve t olsun.

$\inf A=c \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists a_\varepsilon\in A:\ a_\varepsilon<c+\varepsilon/2$

$\inf B=t \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists b_\varepsilon\in A:\ b_\varepsilon<t+\varepsilon/2$

$$\begin{array}{r}+\\ \hline a_\varepsilon+b_\varepsilon<c+t+\varepsilon\end{array}$$

Yani $\forall\varepsilon>0$ için $\exists z_\varepsilon=a_\varepsilon+b_\varepsilon\in A+B$ öyle ki $z_\varepsilon<c+t+\varepsilon$ bulunur ki bu, $\inf(A+B)=c+t=\inf A+\inf B$ demektir.

B. Sağır Duyar

3) a) $\dfrac{|2x-1|}{|x-3|} > 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$x-3=0 \Rightarrow x=3$

x		$\frac{1}{2}$		3	
2x-1	−	0	+		+
x-3	−		−	0	+

$x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ icin

$\dfrac{1-2x}{3-x} > 3 \Rightarrow 1-2x > 9-3x \Rightarrow x > 8$

$x \notin (-\infty, \frac{1}{2})$

$x \in (\frac{1}{2}, 3)$ icin

$\dfrac{2x-1}{3-x} > 3 \Rightarrow 2x-1 > 9-3x \Rightarrow 5x > 10 \Rightarrow x > 2$

$x \in (2,3)$ icin esitsizlik sağlanır.

$x \in (3, \infty)$ icin

$\dfrac{2x-1}{x-3} > 3 \Rightarrow 2x-1 > 3x-9 \Rightarrow 8 > x$

$x \in (3,8)$ icin esitsizlik sağlanır.

$x=\frac{1}{2}$ ve $x=3$ eşitsizliği sağlamaz.

O halde verilen eşitsizliği sağlayan x lerin kümesi $(2,3) \cup (3,8)$ dir.

b) Üçgen eşitsizliğini kullanarak $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ ve bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $|x-a| < \varepsilon$ ve $|y-b| < \varepsilon$ ise $|x.y - a.b| < \varepsilon\left(|a|+|b|\right)+\varepsilon^2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
|xy-ab| &= |xy - xb + xb - ab| \\
&\leq |x(y-b)| + |b(x-a)| \\
&= |x|.|y-b| + |b|.|x-a| \\
&< |x|\cdot\varepsilon + |b|.\varepsilon \\
&= |x-a+a|\cdot\varepsilon + |b|.\varepsilon \\
&\leq (|x-a|+|a|)\varepsilon + |b|.\varepsilon \\
&< (\varepsilon+|a|)\varepsilon + |b|.\varepsilon \\
&= \varepsilon^2 + |a|\varepsilon + |b|\varepsilon
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $|xy-ab| < \varepsilon^2 + (|a|+|b|)\varepsilon$ bulunmuş olur.

B. Sağır Duyar